→ by schlumsch/ März 2003 / Ilmenau / schlumsch@duensch.org

→ Lineare Algebra → Vektorrechnung (Grundlagen) kompakt

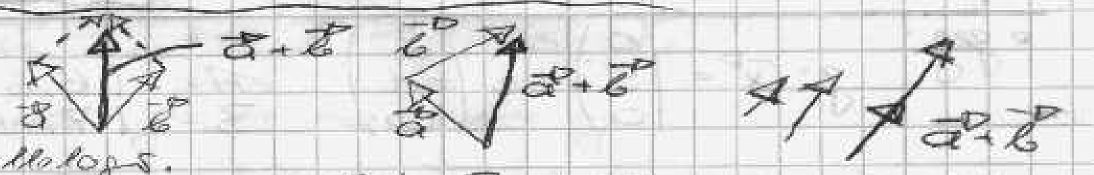
→ Sg. Informatik Semester 1

→ Seiten: 4

- Seite 1-3 = Vektorrechnung Übersicht
- Seite 4 = Winkel zw. Vektoren / Ebenen / Geraden

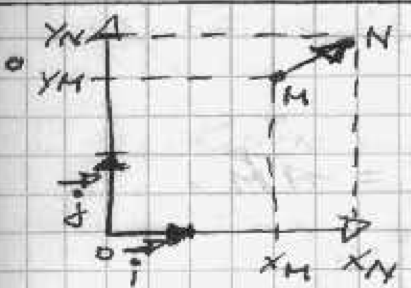
Vektoren – Ebenen – etc.

• Addition:



Parallelogr.

Anf. + Endpkt. zusammen



$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$
$= (\vec{i}\cdot x_M + \vec{j}\cdot y_M) + (\vec{i}\cdot x_N + \vec{j}\cdot y_N)$
$= \vec{i}\,(x_M - y_M) + \vec{j}\,(x_N + y_N)$

$\boxed{\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - x_N \end{pmatrix}}$

• ∞ Gleichungssysteme:

x_1	x_2	x_3	=	
2	−3	4	1	$\cdot(-1{,}5)$, $\cdot(-3{,}5)$
3	1	−5	7	
7	−5	3	9	
0	5,5	−11	5,5	$\cdot(-1)$
0	5,5	−11	5,5	
0	0	0	0	

$x_3 = t$

$5{,}5x_2 - 11t = 5{,}5$
$x_2 = 1 + 2t$
$x_1 = 2 + t$

$L = \{2+t \mid 1+2t \mid t\}$

• Gleichungssys. mit Parametern:

x_1	x_2	x_3	=	
1	1	1	1	$\cdot(-2)$, $\cdot(-1)$
2	−1	4	5	
1	4	a	b	
0	−3	2	3	
0	3	a−1	b−1	
0	0	a+1	b+2	

1ne Lsg: $(a+1)x_3 = b+2$
$a = -1,\ b = -2$

Keine Lsg: $(a+1)x_3 = b+2$
$a = -1,\ b \neq 2$

∞ Lsg's: $(a+1)x_3 = b+2$
$a \neq -1$

• $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ = Länge

• ∢: $\cos\alpha = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ = Winkel

Bsp: $A = (4,6,0)$
$B = (0,7,0)$
$C = (2,4,6)$

∢ ACB ?

$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 6-4 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 7-4 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

einsetzen

$|\vec{a}| = 6{,}63$

gg: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $A = (6,6,0)$, $B = (7,1,0)$

ges: Gerade h: • durch Mittelpkt. $\overline{AB}$

• $\perp$ zu $\overline{AB}$

• in x_1/x_2 - Ebene

$$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 7-6 \\ 1-6 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -2{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AM}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}5 + 6 \\ -2{,}5 + 6 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

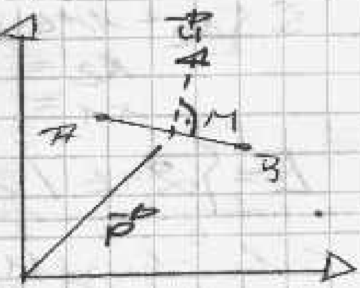
Stützvektor $\overrightarrow{OM}$

$$= \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor soll $\perp \overline{AB}$ ⇒

$$\overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

in x_1/x_2 - Ebene!



$$1 \circ x_1 - 5x_2 + 0 = 0, \quad x_1 = 5x_2$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $g = h$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{4}{t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{4}{s} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

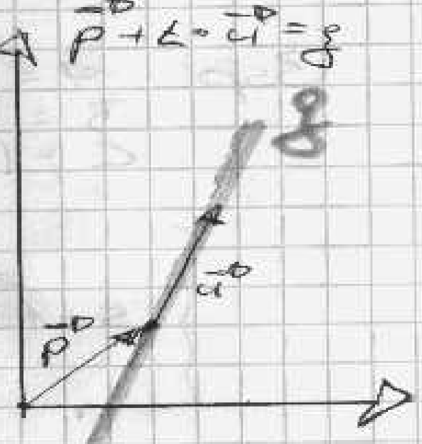
$$0 + 2t = 6{,}5 + 5s \qquad s = -0{,}5$$
$$5 - t = 3{,}5 + s \qquad t = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 6{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

immer von 0 ausgehend!

$\vec{p} + t \cdot \vec{u} = g$



schlumse

① Schnittpunkt: $g = h$ hat Lösung

② ∞ Lsg: g & h fallen aufeinander

③a Keine Lsg: $g \parallel h$ → $\vec{u}$ & $\vec{u}_1$ linear abhängig

③b Keine Lsg: g & h windschief → $\vec{u}$ & $\vec{u}_1$ linear unabhängig

→ $g = h = \vec{p} + t \cdot \vec{u} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{u}_1$ hat keine Lösung für t und s

- Linear abhängig = ∞ viele Lösungen
- -"- un -"- = nur 0 als Lösung

bei

$\vec{u}$	$\vec{v}$	=
u_1	v_1	0
u_2	v_2	0
u_3	v_3	0

- ∢ zw. Geraden: $\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$; Stützvektoren

---

- Parameterform → Koordinatenform

$$h: \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{Ebene!}$$

$x_1 = -7 + 2r - 4s$
$x_2 = 1 + r + s \quad | \cdot 4$
$x_3 = 5 + r - s \quad | -3$
$x_2 + x_3 = 6 + 2r$
$x_1 + 4x_2 = -3 + 6r$

$$\boxed{x_1 + x_2 - 3x_3 = -21}$$

auf rechter Seite ∀ Parameter entfernen → 0

- Koord.f. → Param.f.

$3x_1 - x_2 + 7x_3 = 12$ $\qquad x_1 = r$, $x_2 = s$

$x_1 = 0 + r + 0s$
$x_2 = 0 + 0r + s$
$x_3 = -12 + 3r + 7s$

⇓

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorbums Formelübersicht

$\vec{v} \measuredangle \vec{v}$: $\cos\alpha = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 \ldots}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$g \measuredangle g$: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ Betrag / Länge

$E \measuredangle E$: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

$E \measuredangle g$: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u} \circ \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

aus E-Gl.

d(P-E) : $|(\vec{r} - \vec{p}) \circ \vec{n}_0|$, $\vec{n}_0 = \dfrac{1}{|\vec{n}|} \circ \vec{n}$ Normalform

: $\left| \dfrac{a x_1 + b x_2 + c x_3 - r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$ Koord. form

$\vec{n}_{1..3}$

d(P-G) : $\left|\left[\binom{p_1}{p_2} - (\vec{n})\right]\right| \circ \vec{n}_0$

d(G-E) :

schlumsch@duensch.org