→ by schlumsch/ März 2003 / Ilmenau / schlumsch@duensch.org

→ Numerische Mathematik → Formelsammlung mit Beispielen (Beispielrechnungen zu den wichtigsten Themenbereichen)

→ Sg. Informatik Semester 3

→ Seiten: 11

Numa - Kurzübersicht

1) GlSys

- S.7 **LR-Zerlegung** (alle Matrizen) Seminarmitschrift
- S.11 **Cholesky** (pos.def. + symm. Matrizen)
- S.15 **Fixpunkt**
- S.16 **Jacobi + Gauß Seidel** (Verfahren im Script/Bsp im Hefter)
- **BSP : Anzahl der Iterationen um bis auf x heranzukommen** → Hefter
- **Norman** → Hefter
- S.14 / S.20 /21 **Normen / kompatible Normen** → Hefter
- S.21 **Fehlerabschätzung**
- S.22 **Rundungsfehler**

2) n.lin.Gleichungen

- **Intervallhalbierungsmthode** → Hefter
- S. 25 **Regula falsi** → Hefter
- **A posteriori / A priori Fehlerabschätzung** → Hefter

3) n.lin.Gl.systeme

- S.28 **Jacobi-GaußSeidel f. n.lin Glsys = n.linGl.sy. in iterierbare Form + Konvergenzbeweis**
- **= NewtonVerfahren**→Hefter
- S.26 **Newton Verfahren** → Hefter

4) Interpolation/Approximation

- S. 31 **Lagrange + Interpolationspolynom**
- **Lagrangsches Interpolationspolynom** → Hefter
- S.34 **Interpolationsfehler** → Hefter
- **Berechnung stückweise def. Fkt. / Wertbestimmung damit f(x)=kub.Spline / Parameterberechnung von f(x) damit Interpolationsbedingung erfüllt (x / f(x) Tabellenform)** →Hefter

5) Best. Integrale

- **Integrationsregeln + Bsp.** → Hefter
- S. 52 **Gewichte**
- S. 55/56 **Summierte Reglen**

Fixpunktprobleme: $A = A_L + A_D + A_R$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad A_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Jacobi -

$$x = \underbrace{B^{-1} \cdot C}_{M} x + \underbrace{B^{-1} \cdot b}_{c} = Mx + c$$

$B = A_D = \mathrm{diag}(a_{11} \dots a_{nn})$ $\quad B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \mathrm{diag}(1/a_{11} \dots 1/a_{nn})$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}$

$\cancel{c = B^{-1} \cdot b}$ $\quad C = -A_L - A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$ $\quad c = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/8 \end{pmatrix}$

→ nach Iterationsvorschrift Jacobi (S.16)

$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad x_1^1 = -\frac{1}{10}(-1 \cdot 0 \dots -6) = 3/5$

$x_2^1 = -\frac{1}{11}(-25) = 25/11$

$\vdots$

$x^1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/8 \end{pmatrix}$

$x^{(k+1)} = M x^{(k)} + c$

$x^2 = M x^1 + c$ $\quad M = B^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1/10 & -1/5 & 0 \\ 1/11 & 0 & 1/11 & -3/11 \\ -1/5 & 1/10 & 0 & 1/10 \\ 0 & -3/8 & 1/8 & 0 \end{pmatrix}$

- Gauß Seidel -

- $B = A_D + A_L$
- $C := -A_R$
- x^1 = Iterationsvorschrift S. 16

Schlumse

Interpolationsfehler

Script S. 84

~~geg~~:

ges: Interpolierten Werte zu Polynom P_4 an Stellen $x = 2,9$ und $x = 5,25$

geg: Fkt. $f(x) = \ln(x) - 2 \cdot \frac{(x-1)}{x}$

Stützstellen: $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 8, x_4 = 10$

- Polynom berechnen nach Lagrange

$$|p_n(x) - f(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \cdot |\omega(x)|$$

$\Rightarrow \|f^{(n+1)}\| = \max_{a \leq t \leq b} |f^{(n+1)}(t)|$ — n+1te Ableitung

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$f^5(x) = \frac{24}{x^5} - \frac{240}{x^6} \quad (\text{berechnete 5te Ableitung})$$

$$f^5(1) = -216 \quad \Rightarrow \max = 216 = \|f^{(n+1)}\|$$

$$f^5(10) = 0$$

höchster & niedrigstes der gegebenen x-Werte

$$|p_4(2.9) - f(2.9)| \leq \frac{216}{5!} \cdot |\omega(2,9)|$$

$$\approx 140$$

$$|p_4(2,9) - f(2,9)| \approx 0,05$$

Bsp: Anzahl d. Iterationen um bis auf 10^{-4} in der $\|\cdot\|_\infty$ Norm an x^* heranzukommen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

① Matrix o. Vektornorm suchen & berechnen
② In die Formel S. 14 einsetzen

Matrixnorm

$$\lambda = \max_{i=1..4} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max\left\{\frac{3}{10}, \frac{5}{11}, \frac{4}{10}, \frac{4}{8}\right\} = 1/2$$

$\forall$ \ HD

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \cdot \|x^1 - x^0\|$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - 1/2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 3/5 \\ 25/11 \\ -11/10 \\ 15/8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 10^{-4}$$

Vektornorm

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{25}{11} \leq 10^{-4}$$

$$(1/2)^k \leq \frac{11}{50} \cdot 10^{-4} \quad | \ln$$

$$k \cdot \ln(1/2) \leq \ln\left(\frac{11}{50} \cdot 10^{-4}\right)$$

$$\underline{k \geq 16}$$

Lagrangsches Interpolationspolynom

geg: Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^{2} = \{0,2,3\}$ zur Fkt. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

ges: Lag. IPP. $L_2(x)$ → $\underline{n=2}$ Script S. 31

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = f_0 = 0$

$x_1 = 2 \rightarrow f(x_1) = f_1 = 2/5$ $n = 2$

$x_2 = 3 \rightarrow f(x_2) = f_2 = 3/10$

$L_i(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ = Basis

$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-2}{0-2} \cdot \frac{x-3}{0-3} = 1/6\,(x-2)(x-3)$

$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-3}{2-3} = (-1/2)\,x\,(x-3)$

$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - 1} = \frac{x-2}{3-2} \cdot \frac{x-2}{3-2} = 1/3\,x\,(x-2)$

Interpolationspolynom:

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$

hier: $P_2(x) = 0 \cdot L_0(x) + 2/5 \cdot L_1(x) + 3/10 \cdot L_2(x)$

$= -\frac{1}{10} x^2 + 8/5\, x$

Bsp: LR-Zerlegung:

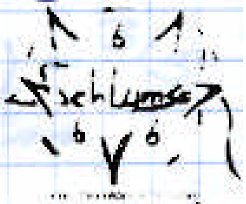
$$
\begin{array}{rrr|l}
2 & -1 & 1 & \\
-2 & 2 & -3 & \cdot 1\,+ \\
2 & -4 & 3 & \cdot(-1)\,+ \\
\hline
2 & -1 & 1 & \\
0 & 1 & -2 & \cdot(-3) \\
0 & -3 & 2 & +\\
\hline
2 & -1 & 1 & \\
0 & 1 & -2 & \\
0 & 0 & -4 &
\end{array}
\qquad
L:\;
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\;
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\;
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}
$$

U $\qquad\qquad$ L

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = L \cdot U$$

alle Infos in 1ner Matrix: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ U, L

Lösen von $A \cdot x = b$ mit LU-Zerlegung



$b = (3, -7, 3)^T$

• $L \cdot y = b$ (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} y_1 = \\ y_2 = \\ y_3 = \end{matrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} = y$$

• $U \cdot x = y$ (2)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

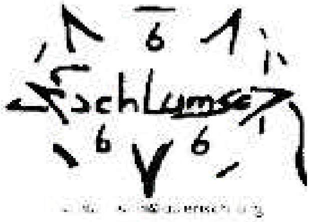
= Lösung

LU/LR-Zerlegung

L = Multiplikationsfaktoren d. Gaußelimination

Direkte Verfahren

Gauss Elimination



$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{x} & \mathbf{f} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

subtrahiere 2x Reihe 1 von Reihe 2 (2.37)
subtrahiere 2x Reihe 1 von Reihe 3
subtrahiere 1x Reihe 1 von Reihe 4

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{4} & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.38)

subtrahiere 1x Reihe 2 von Reihe 3
subtrahiere 2x Reihe 2 von Reihe 4

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.39)

subtrahiere −(4/3)x Reihe 3 von Reihe 4

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{8/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 2 \\ 8/3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.40)

L = untere Δ-Matrix

U = obere Δ-Matrix

Die linke oberje Zahle einer Teilmatrix heisst Pivotekelement. Die durch die Umformungen (2.37) - (2.40) entstande Matrix heisst obere Dreiecksmatrix U. Das zugehorige obere Dreieckssystem $\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{g}$ wird mit Rückwartssubstitiution gelöst

- ∀ Infos in 1ner Matrix: $\begin{pmatrix} & U \\ L & \end{pmatrix}$

- $A = L \cdot U$
- Lösen von Gl.sys: ① U & L berechnen
  ② $L \cdot y = b$ → y berechnen
  ③ → fertig!

Vektornormen:

$$\|x\|_\infty = \max_{k=1..n} |x_k| \quad \text{(Max. norm)}$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \quad \text{(Eukl. Norm}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad (L_1\text{-Norm})$$

Matrixnorm:

$$\|A\|_G = n \cdot \max_{i,j=1..n} |a_{ij}| \quad \text{Ges. norm}$$

$$\|A\|_Z = \max_{i=1..n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{Zeilensumme}$$

$$\|A\|_S = \max_{j=1..n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{Spaltensumme}$$

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

$$\lambda = \max \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \text{ - siehe Bsp.}$$

- Fixpktüberprüfung / Abweichung der Iterierten / Anzahl Schritte:

$\lambda = \gamma$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \gamma^k \|x^{(0)} - x^*\|$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{VN} \quad \text{A priori}$$

$$\|x^{k} - x^*\| \le \frac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \quad \text{A posteriori}$$

Kompatible Normen: S.21

A Posteriori / A priori Fehlerabschätzung

A Posteriori: $\|x^* - x^k\| \le \frac{\lambda}{1-\lambda} \cdot \|x^k - x^{k-1}\|$

A priori: $\|x^* - x^k\| \le \frac{\lambda^k}{1-\lambda} \|x^1 - x^0\|$

Übertragen des Einzel / Gesamtschritt verfahrens für Lin. Gls. auf n. Lin. Gl.sys.

Script S. 28

(a) Gl.-sys in iterierbare form

(b) Konvergenzbeweis

$$g(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 4x - \sin(x_1+x_2) \\ \cos(x_1-x_2) - 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(x)$$

partiell

$$f'(x) = Df = (x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \overset{f'_{x_1}}{4-\cos(x_1+x_2)} & \overset{f'_{x_2}}{-\cos(x_1+x_2)} \\ -\sin(x_1-x_2) & \sin(x_1-x_2)-3 \end{pmatrix}$$

$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.) $\underbrace{f(0,0)}_{f(x_0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underbrace{Df\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{f'(x_0) = Df(x_0)}$

2.) LGS: $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{Df(x^0)} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}}_{s} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{-f(x^0)}$ – Formel S. 28

$\Downarrow$

$3s_1 - s_2 = 0$

$0 - 3s_2 = -1$

$s_2 = 1/3, \; s_1 = 1/9$

$s = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

S 28
A

$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s \to x^1 = x^0 + s = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Newtonverfahren

Script S. 26

$f(x) = e^{-x} - x = 0$

$f'(x) = -e^{-x} - 1$

$f^{k+1} = x^k - \frac{e^{x^k} - x^0}{-e^{-x^k} - 1}$

$f^0 = 0{,}5$ – vorgegeben!

$f^1 = 0{,}566$

Intervallhalbierungsmethode

① Testen ob NS im Intervall (unterisch. Vorzeichen)

② Intervallgrenzen neu setzen

x_0
x_1
x_2
⋮

$$f(x) = e^{-1/2 x} - x = 0$$

$[a,b] = [0,1]$

$f(0) = 1$

$f(1) = -0{,}39$ ⇒ NS innerhalb

⇒ $x_0 = 1/2$, $[1/2, 1]$

$f(1/2) = 0{,}28$ ⇒ NS nicht innerhalb

$x_1 = 3/4$ $[3/4, 1]$

$f(3/4) = -0{,}06$ ⇒ NS innerhalb

Regula falsi

$$f(x) = e^{-1/2 x} - x = 0 \qquad [a,b] = [0,1]$$

$a = 0$ $f(a) = 1$

$b = 1$ $f(b) = -0{,}39$

$$s(x) = f(a) + (x-a) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

① Geradengleichung

② Nullstelle von $s(x)$

③ neues Intervall

$$s(x) = 1 + (x-1) \cdot \frac{-0{,}39-1}{1}$$

$$s(x) = 2{,}93 - 1{,}39x, \quad x^0 = \frac{2{,}39}{1{,}39}$$

wenn $f(x^0) \neq 0$

$[a, x^0]$ od. $[x^0, b]$

Stückweise def. Fkt. / Kub. Spline..

Berechne stückweise def. Fkt.

$$f(x)=\begin{cases} a(x-2)^2+b(x-1)^3, & x\in(-\infty,1) \\ c(x-2)^2, & x\in(1,3) \\ d(x-2)^2+e(x-3)^3, & x\in(3,\infty) \end{cases}$$

(a) a, b, c, d so bestimmen daß f(x) = Kubischer Spline

(b) Parameterbestimmung von f(x) s.d. folgende Interpolationsbed. erfüllt sind:

x	0	1	4
$f(x)$	26	7	25

① Stetigkeit

$x=1 \Rightarrow a(-1)^2+b\cdot 0 = c(-1)^2$ 1 in 1te Gl. & in 2. Gl. da 1 in beiden Intervallen

$a=c$

$x=3 \underset{Gl.3}{\Rightarrow} c=d \Rightarrow a=c \;\&\; c=d \Rightarrow \underline{a=c=d}$

② Ableitungen

Ableitung Gl. 1 an x = 1 = Ableitung Gl. 2 an x = 1

$x=1: 2a(1-2)+3b(1-1)^2=2c(1-2) \Rightarrow a=c$

$x=3: 2c(3-2)=2d(3-2)+3e(3-3)^2 \Rightarrow c=d$

Ableitung Gleichung 2 an Stelle x = 3 = Ableitung Gleichung 3 an Stelle 3

③ 2te Ableitungen

$x=1 \quad 2a=2c \Rightarrow a=c$

$x=3 \quad 2c=2d \Rightarrow a=d$

⇒ Kubischer Spline

(b)

x	0	1	4
$f(x)$	26	7	25

x & f(x) so einsetzen wie oben die Intervalle sind, hier $0\in(-\infty,1)$ und somit in Gl. 1

1.) $a\cdot(0-2)^2+b(0-1)^3=26$

2.) $c(1-2)^2=2$

3) $d(4-2)^2+e(4-3)^3=25$

$a=c=d=7$

$b=2$

$e=-3$

⇒ Interpol. bed. erfüllt

Schlumse